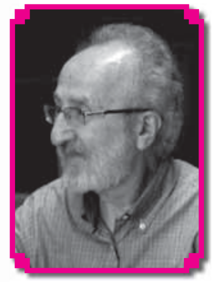
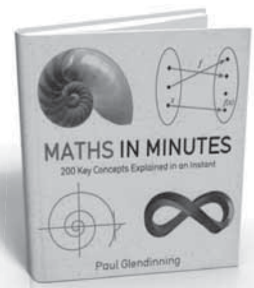
تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضاَ یاسی‌پور

ریاضیات در چند دقیقه





دنبالهٔ فیبوناتچی

«دنبالـهٔ فیبوناتچـی» (Fibonacci sequence) الگویی سـاده اسـت که با جمـع دو عدد، عدد سـوم به‌دسـت می‌آید. این دنباله که به‌نام ریاضی‌دان ایتالیایی که آن را در سـال ۱۲۰۱ به غـرب معرفی کـرد، نامیده شـده اسـت، در حوزه‌های متعددی از ریاضیات و نیز در مشـاهدهٔ دنیای فیزیکی و طبیعی آشکار می‌شود.

دنبالـهٔ مـورد بحث برحسـب جمله‌هـای ریاضی به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

(با $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$)

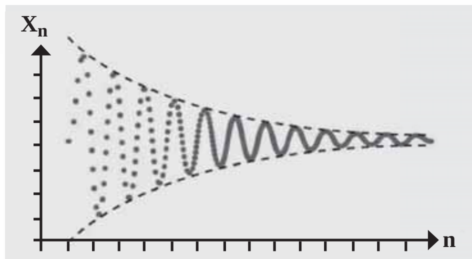
قاعدهٔ به‌کار رفته در زنجیره‌ای از اعداد با آغاز از ۰، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ... به‌دسـت می‌آید. اعداد مورد بحث در زیست‌شناسی در رابطهٔ بین پیچش‌هـای یک گیاه و تعـداد برگ‌های واقع در امتداد سـاقهٔ آن، در ترتیب مارپیچ دانه‌های گل آفتاب‌گـردان و در بسـیاری از الگوهایی که به‌طور طبیعـی رخ می‌دهنـد، منعکـس شـده‌اند. دنبالهٔ فیبوناتچی در حوزه‌ای از زمینه‌های ریاضی، از جمله حل الگوریتم اقلیدس نیز مفید اسـت. این دنباله با نسبت طلایی نیز مرتبط است.

دنباله‌های هم‌گرا

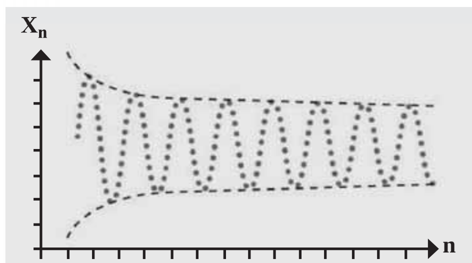
جمله‌های واقع در یک فهرســت مرتب از اعداد، در صورتی‌کــه به‌تدریج در یک مقــدار معین یا حد محصور شوند، هم‌گرا هستند. اما در حالی‌که ممکن اسـت ملاحظه کنیم که دنباله‌ای بــه حدی هم‌گرا می‌شود، چگونه می‌توانیم بدانیم که این حد چیست؟ بــرای مثال، روش‌هــای تخمین π غالبــاً بر نزدیک شــدن دنباله متکی اســت. در این مورد، همین‌طور کــه دنباله‌مان به عددی نزدیک‌تر و نزدیک‌تر شــود، مناسب است که بگوییم این عدد مقدار واقعی π است.

اگر عــدد L ی معلوم باشــد، آن‌گاه در صورتی دنبالــه‌ای به L میل می‌کند که بــا معلوم بودن هر سطح از خطای ε، مرحله‌ای از آن دنباله موجود باشد کــه پس از آن جمیع جمله‌های باقی‌مانده فاصله‌ای کمتر از ε از L داشــته باشند. **کارل وایراشتراوس** (Karl Weierstrass) و دیگــران کشــف کردند که دانســتن L به‌خاطر تعیین این مطلب که دنباله‌ای هم‌گرا می‌شود یا نه، لزومی ندارد.

یک «دنبالهٔ کوشــی» (Cauchy sequence) دنباله‌ای اســت که در آن، با معلوم بودن هر ســطح از خطــای ε، مرحله‌ای در دنباله وجود دارد که پس از آن هــر دو نقطهٔ باقی‌مانده در دنبالــه، فاصله‌ای کمتر از ε از یکدیگر داشــته باشــند. در مورد اعداد حقیقی، این موضوع با داشتن حد هم‌ارز است.



نمودار دنباله‌ای در یک سری هم‌گرا (بالا) و یک سری ناهم‌گرای نوسان‌کننده (پایین).



سری هم‌گرا

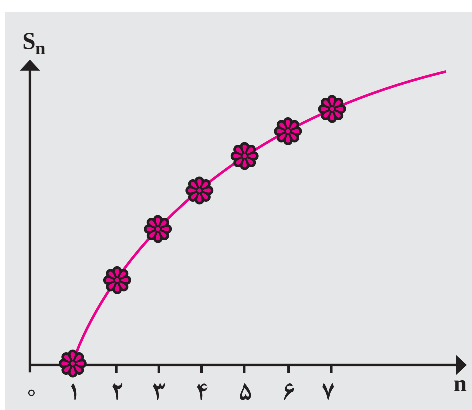
مجموع یک فهرســت مرتب اعداد، هم‌گراست اگــر به مقــداری معین یا حدی میــل کند. به‌طور شــهودی، می‌توان تصور کرد که یک‌سری متمرکز می‌شــود اگر تفاوت بین مجموع‌های جزئی متوالی آن، یعنــی جمــع ســری در تعدادی مشــخص از جملات، کوچک‌تر و کوچک‌تر شود.

برای مثال، اگر دنبالهٔ مجموع‌های جزئی چنین باشد: $\{۱, S_۱, S_۲, S_۳, ...\}$ که در آن:

$$S_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ... + \frac{۱}{n}$$

آن‌گاه تفــاوت بیــن S_n و $S_{n+۱}$ بــرابــر $\frac{۱}{n+۱}$ می‌شــود، و هنگامی‌کــه n بســیار بــزرگ شــود، $\frac{۱}{n+۱}$ بســیار کوچک می‌شود. اما آیا این وضع برای اینکه گفته شــود، این ســری، که به‌عنوان «سری هم‌ســاز» (harmonic sery) معروف است، واقعاً به حدی متمرکز می‌شود، کافی است؟

آشــکار می‌شــود کــه S_n در این حالــت متمرکز نمی‌شود، و سری «واگرا» (divergent) است. بنابراین، حتــی اگر توان‌های متوالی، مانــند یک دنبالهٔ هم‌گرای کوشی، کوچک شوند، این موضوع به خودی خود برای تضمین هم‌گرا بودن یک‌سری کافی نیست.



نمودار ســری هم‌ســاز ــ گرچه مجموع‌های آن به‌تدریــج به‌هم نزدیک‌تر می‌شوند، هیچ‌گاه به یک حد هم‌گرا نمی‌شوند.